

## Das "Metapendel"

### oder: eine sich selbst antreibende Schaukel

H. Joachim Schlichting, Christian Ucke

*Die Welt? Eine ewige Schaukel!*

Michel de Montaigne

Das Metapendel schwingt nicht nur auf und ab und hin und her, sondern pendelt auch gewissermaßen auf einer Metaebene - zwischen diesen beiden Schwingungszuständen hin und her.

In meinem Zimmer hängt eine am Ende einer Schraubenfeder befestigte Stahlkugel, die mit einem Faden an der Zimmerdecke fixiert ist. Es gibt kaum einen Besucher, der sich nicht veranlaßt fühlt, an der Kugel zu ziehen und diese dadurch in eine vertikale Schwingung zu versetzen. Wer dieser fast als Reflex ausgeführten Aktion auch nur kurze Zeit Aufmerksamkeit schenkt, gerät bald in großes Erstaunen. Das Pendel verhält sich völlig anders, als man es naiverweise erwartet: Die Auf- und Abbewegung wird auffallend stark gedämpft und gerät gleichzeitig in eine Hin- und Herbewegung, die in dem Maße zunimmt, wie erstere abnimmt. Schließlich erinnert nichts mehr an das ursprüngliche Auf und Ab; es geht nur noch hin und her. Aber ehe man sich versieht, treten bereits wieder vertikale Auslenkungen der Feder auf, die schließlich ebenso unvermittelt, wie sie verschwanden, erneut das gesamte Geschehen dominieren. Man errät, wie es weiter geht. Der Wechsel zwischen vertikalem und horizontalem Pendeln setzt sich solange fort, bis die Schwingungsenergie dissipiert und das Pendel in Ruhe ist.

Das ebenso für den physikalisch Vorgebildeten wie für den Laien Faszinierende an diesem Phänomen ist die Präzision, mit der sich die beiden Schwingungsarten in permanentem Wechsel „auf Kosten“ der jeweils anderen aufschaukeln. Lediglich die unvermeidlichen Reibungsverluste lassen die Amplituden immer

kleiner werden und bringen den Vorgang schließlich zum Stillstand.

Der physikalisch Vorgebildete wird in unserem Metapendel unschwer ein Beispiel für parametrische Instabilität und nichtlineare Resonanzkopplung erkennen, wie sie heute vor allem im Bereich der nichtlinearen Optik und



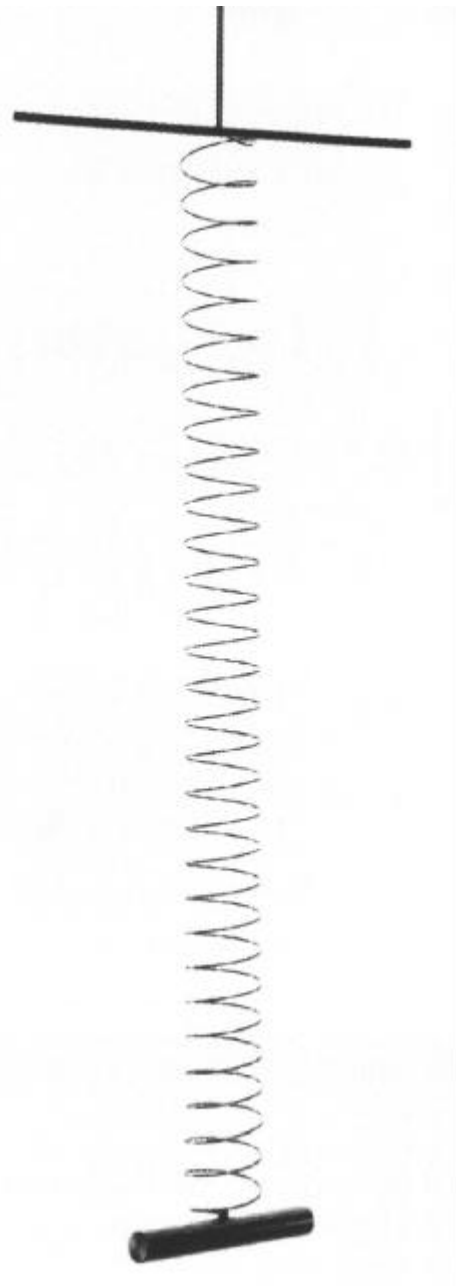
Plasmaphysik diskutiert werden. Theoretisch handelt es sich um ein zweidimensionales mechanisches Problem, das von Minorsky [1] näherungsweise gelöst und von anderen [2, 3] vereinfacht dargestellt wurde.

Im vorliegenden Fall wird aufgrund der Federschwingung der Parameter der Pendellänge periodisch variiert. Ein solcher Vorgang ist jedoch instabil. Aufgrund einer nichtlinearen Kopplung zwischen beiden Schwingungsfreiheitsgraden stets vorhandene kleinste Störungen reichen aus, das Pendel horizontal auszulenken und eine Aufschaukelung der Amplitude zu verursachen.

Eine solche parametrische Erregung des Pendels weist eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Antrieb einer Kinderschaukel auf. Dadurch daß das Kind sich im Rhythmus der einsetzenden Schaukelschwingung phasenrichtig aufrichtet und niederkauert, wird der Schwerpunkt des aus Schaukel und Kind bestehenden Systems periodisch auf- und abbewegt und die Pendellänge entsprechend verkürzt und verlängert. Auf diese Weise setzt das Kind die Schaukel in Gang und hält sie in Bewegung. Im Unterschied zum Metapendel kann das Kind aus dem „unerschöpflichen“ Reservoir seiner Muskelenergie schöpfen, dadurch Reibungsverluste ausgleichen und die Schwingung beliebig lange aufrechterhalten. Der zum horizontalen Pendeln führende Aufschaukelvorgang ist jedoch nicht reversibel. Im allgemeinen Fall würde das System im Zustand einer durch Auf- und Abbewegungen in chaotischer Weise modulierten Hin- und Herschwingung verbleiben. Erst durch eine geeignete Wahl der Pendellänge wird dafür gesorgt, daß schließlich ein vollständiger „Rücktransport“ der Schwingungsenergie erfolgt. Die Pendellänge wird mit Hilfe eines Fadens so verlängert, daß die horizontale Pendelschwingung in Resonanz mit der vertikalen Federschwingung geraten muß. Auf diese Weise wird die Frequenz, mit der die Feder aufgrund der Trägheit der pendelnden Kugel in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit mehr oder weniger stark ausgelenkt wird, so auf die Eigenfrequenz der Feder abgestimmt, daß die Resonanzbedingung erfüllt ist. Wie eine einfache Abschätzung zeigt (siehe „Resonante Schwingung“), erreicht man eine solche Abstimmung, indem man die Pendellänge betragsmäßig gleich dem Quadrat der (in Meter pro Sekunde gemessenen) Schwingungsdauer der Auf- und Abbewegung wählt.

Man braucht also nur die Schwingungsdauer des Federpendels zu ermitteln, das man sich aus einer, mit einem geeigneten Pendelkörper versehenen, Schraubenfeder herstellt. Dazu hängt man diesen Schwinger auf, lenkt ihn aus und stoppt die Zeit für eine größere Zahl von Schwingungen, woraus sich die Schwingungsperiode irf ergibt.

Wird beispielsweise der Wert  $T_1 = 1,12$  s ermittelt, muß die Pendellänge  $l_{ws} = T_1^2 \text{ (m/s}^2\text{)} = (1,12)^2 \text{ m}$  1,25 m betragen. Jetzt braucht man nur noch mit Hilfe eines Fadens das Feder-Masse-System entsprechend zu verlängern



**Das Wilberforce- Pendel**

(wobei bis zum Schwerpunkt des Pendelkörpers gezählt werden sollte). Damit ist das Metapendel fertig.

Bei handelsüblichen Federn erweist sich unserer Erfahrung nach die Pendellänge  $l_{ws}$  als relativ unkritisch, so daß die oben unterstellten Idealisierungen (Pendelkörper als Punktmasse, masselose Feder) gerechtfertigt erscheinen.

Der Reiz unseres Metapendels besteht vor allem darin, daß aus dem Durcheinander der zwischenzeitlich auftretenden Überlagerung beider Schwingungsarten mit der Präzision eines Uhrwerks immer wieder genau eine der beiden Schwingungsarten hervorgeht. Wenn die Anfangsbedingungen verändert werden und der Start aus einer

"gemischten" sowohl vertikalen als auch horizontalen Auslenkung heraus erfolgt, bleibt das Verhalten zwar insofern regulär, als der Anfangszustand in regelmäßigem Rhythmus immer wieder durchlaufen wird. Es werden aber nicht mehr die reinen Zustände einer Hin- und Herbewegungsweise Auf- und Abschwingung durchlaufen.

Wenn man zusieht, wie ein Beobachter oft längere Zeit staunend vor dem Metapendel verharrt, fühlt man sich vielleicht an ein Wort Thomas Manns erinnert: „Die Bewegung, die unserem Geist durch die Sinne mitgeteilt wird, ist viel stärker als die, welche das "Wort darin erzeugt."

Ein ähnlicher Wechsel zwischen zwei verschiedenen Schwingungsvorgängen läßt sich mit dem sogenannten Wilberforce-Pendel realisieren [5] (siehe Abbildung). In diesem Fall ist das Trägheitsmoment des Pendelkörpers so auf die Eigenfrequenz der Schraubenfeder abgestimmt, daß es zu einem regelmäßigen Wechsel zwischen vertikaler Schwingung und Drehschwingung kommt. Die Konstruktion eines solchen Drehschwingers ist allerdings etwas komplizierter, weil hier der Pendelkörper sowohl hinsichtlich Form (Trägheitsmoment) als auch Masse auf die Schraubenfeder abgestimmt werden muß. Form und Masse können bei Festkörpern aber kaum unabhängig voneinander variiert werden.

Wie würde wohl ein Pendel auf uns wirken, in dem alle drei verschiedenen Schwingungsarten miteinander gekoppelt

erscheinen?

## Literatur

- [1] N. Minorski, *Nonlinear Oscillations*. Krieger Publ. Comp., New York (1974).
- [2] M. G. Olsson, *Am. J. Phys.* 44, 1211(12/1976)
- [3] H. M. Lai, *Am. J. Phys.* 52, 219 (3/1984).
- [4] W. Ebeling, W. R., *Tietze, Junge Wissenschaft* 3, 8 (9/1488).
- [5] R.L. Wilberforce, *Philos. Mag.* SS, 586 (1894).

### *Resonante Schwingung*

*Zur Resonanz zwischen der vertikalen und der horizontalen Schwingung kommt es, wenn die Periode der Auf- und Abschwingung*

$$T_1 = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (1)$$

*gerade die Hälfte der Periode der seitlichen Pendelschwingung*

$$T_1 = 2\pi\sqrt{l/g} \quad (2)$$

*ausmacht, also*

$$T_1 = 2 T_1. \quad (3)$$

*Dabei sind  $m$  die Masse des Pendelkörpers,  $k$  die Federkonstante,  $l$  die Pendellänge bei Belastung der Feder und  $g$  die Erdbeschleunigung. Aus Gl. (3) erhält man durch einsetzen von Gl. (1) und (2) die Pendellänge  $l_{ws}$  für eine Wechselschwingung*

$$l_{ws} = 4 g m/k. \quad (4)$$

*Die Federkonstante  $k$  ergibt sich aus Gl. (1)*

$$k = 4\pi^2 m/T_1^2. \quad (5)$$

*Einsetzen von Gl. (5) in Gl.(4) liefert*

$$l_{ws} = g T_1^2/\pi^2 = 0,994 (m/s^2) T_1^2 \gg (m/s^2) T_1^2.$$