

# Paradoxe Federn

## aus dem Blickwinkel des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik

*Eine paradoxe Ansicht  
ist nicht jedes Mal eine schiefe.  
(DENIS DIDEROT)*

### 1 Einleitung

Situationen, die unsere Anschauung auf Kollisionskurs bringen, verweisen oft auf eine tiefe physikalische Einsicht, auch wenn sie sich als so genannte Paradoxa in die Lehrbuchliteratur eingeschrieben haben. Man denke nur an das hydrodynamische und hydrostatische Paradoxon, an das GIBBSsche und an das Uhrenparadoxon, um nur einige zu nennen. Darüber hinaus gibt es zahlreiche weitere in diesem Sinne paradoxe Situationen in der Physik, ohne dass sie zu einer entsprechenden Namensgebung gelangt wären. Diese zuweilen in Form eines Rätsels oder einer Denksportaufgabe gekleideten Herausforderungen der lebensweltlichen Intuition sind oft von didaktischem Nutzen, weil sie physikalische Überzeugungen auf die Probe stellen und zu physikalischen Argumentationen anregen.

Manche derartig paradox erscheinende Situationen lassen sich mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik aus der Welt schaffen und helfen dabei, mit der Universalität dieses Prinzips vertraut zu werden. Als Beispiel sei an die nur mechanische Sachverhalte betreffende Frage erinnert, um wie viel die Energie des Wassers in einem Gefäß abnimmt, wenn man das Gefäß an der tiefsten Stelle mit einem gleichgroßen leeren zweiten Gefäß verbindet [1]. Wenn man das Problem nicht schon kennt oder aufgrund der vermeintlichen Trivialität Verdacht schöpft, tappt man unweigerlich in die Falle.

### 2 Wie wenn sich der Schwerpunkt von selbst erhöbe

Ein ähnliches Problem stellen die *paradoxen Federn* dar, die als Veranschaulichung eines nicht minder paradox erscheinenden Verkehrsproblems<sup>1</sup> konzipiert wurden. Worum es geht, lässt sich leicht in einem einfachen Freihandversuch anhand von Abbildung 1 (links) darstellen. Eine Kugel der Masse  $m$  wird an einem System von zwei gleichen Schraubenfedern aufgehängt, von denen das untere Ende der oberen Feder (F1) und das obere Ende der unteren Feder (F2) mit Hilfe eines kurzen Fadens fest verbunden sind. Außerdem ist das obere Ende von F2 mit einem Faden an der Aufhängung fixiert, an der auch F1 aufgehängt ist. Das untere Ende von F1 ist mit einem Faden mit der Kugel verbunden, die gleichzeitig am unteren Ende von F2 hängt. Die Fadenlänge ist so bemessen, dass die Fäden zwar straff, aber nicht belastet sind. (Die Masse der Kugel sollte so groß sein, dass im Vergleich dazu die Eigenmassen der Federn und der Fäden vernachlässigt werden können.)

Was passiert, wenn die kurze Verbindung durchtrennt wird?

Aufgrund der sich gegenseitig spannenden Federn erwartet man wahrscheinlich, dass der Schwerpunkt des Systems aus den beiden Fäden und Federn abgesenkt wird – so wie man es vom Übergang eines mechanischen Systems ins Gleichgewicht kennt. Denn jeder von selbst ablaufende Prozess, der ein System ins Gleichgewicht überführt, ist mit Dissipation von Energie verbunden, die dem System anschließend fehlt (vgl. z. B. [4], [5]).

<sup>1</sup> Das Problem besteht darin, dass in einer bestimmten Situation durch eine zusätzliche Entlastungsstraße die Gefahr von Verkehrsstaus noch verschärft wird [2–3].

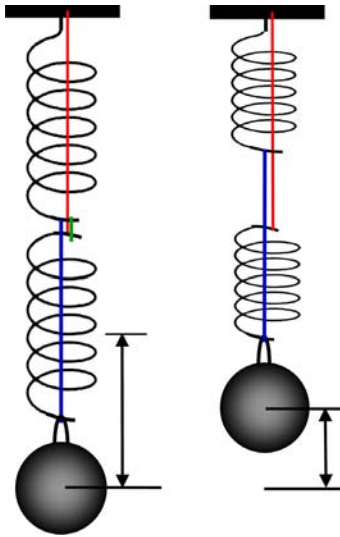


Abb. 1. Links: Anfangszustand des Systems, bei dem die Federn durch einen (grünen) Faden miteinander verbunden sind. Rechts: Endzustand nachdem der Faden durchgetrennt wurde.

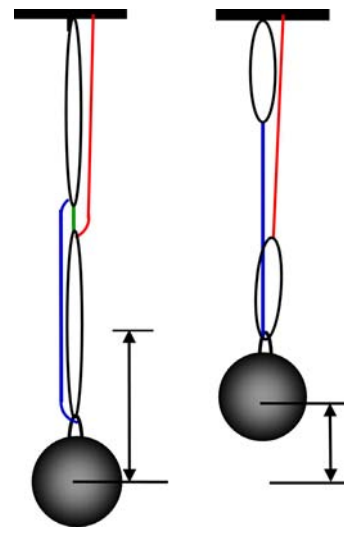


Abb. 2. Statt Federn lassen sich auch Gummibänder verwenden.

Nachdem das Federsystem zur Ruhe gekommen ist, stellt man jedoch fest, dass der Schwerpunkt nicht gesenkt, sondern deutlich angehoben wurde. Betrachtet man den Teilprozess der »Erzeugung« von Gravitationsenergie als Umkehrung des mit Entropiezunahme verbundenen Vorgangs der Absenkung des Schwerpunkts der Kugel unter Abgabe der Gravitationsenergie an die Umgebung, so ist mit ihm eine entsprechende Entropieabnahme verbunden, (die man sich als Umwandlung von thermischer Energie der Umgebung in Gravitationsenergie vorstellen kann). Eine solche Entropieabnahme ist nach dem zweiten Hauptsatz nur möglich, wenn gleichzeitig eine mindestens genauso große Entropiezunahme auftritt.

Um den mit Entropiezunahme verbundenen Teilprozess zu erkennen, muss man sich vor Augen führen, dass das System nicht nur Gravitationsenergie enthält, sondern auch elastische Energie, die in den (gespannten) Federn gespeichert ist. Damit ist aber klar, dass im Endzustand den Federn mindestens genauso viel elastische Energie verloren ging wie an Gravitationsenergie gewonnen wurde. Mindestens, denn die Heftigkeit der Zustandsänderung lässt auf eine starke Energiedissipation bzw. Entropieerzeugung schließen.

Welche Mechanismen machen das möglich? Zur Beantwortung dieser Frage muss man zunächst topologisch denken und durchschauen, dass das System am Anfang aus zwei hintereinandergeschalteten Federn besteht. Diese Federn werden durch die Kugel beide um denselben Betrag ausgelenkt, also insgesamt um das Doppelte der Auslenkung einer einzelnen Feder. Nach dem Durchtrennen des Fadens entsteht ein System aus zwei parallel geschalteten Federn. Aufgrund der damit einhergehenden Halbierung der auf jede einzelne Feder wirkenden Kraft, werden sie jeweils nur halb so stark gedehnt wie bei der Hintereinanderschaltung. Weil die untere Feder aber an einem (als nicht dehnbar vorausgesetzten) Faden hängt, verkürzt sich die Dehnung des Federsystems auf die Hälfte der

Dehnung einer Feder und damit auf ein Viertel der ursprünglichen Gesamtdehnung.

Die Energie jeder der beiden Federn nimmt wegen ihrer quadratischen Abhängigkeit von der Längenänderung auf ein Viertel des ursprünglichen Wertes ab, so dass sich auch die Federenergie des Gesamtsystems auf ein Viertel reduziert. Das System verliert also beim Strukturübergang insgesamt drei Viertel seiner Energie. Da der Schwerpunkt um die Hälfte der Auslenkung einer Feder gehoben wird, geht die Hälfte der ursprünglichen Federenergie in Gravitationsenergie über. Daraus ergibt sich aber, dass ein Viertel der ursprünglichen Federenergie des Systems dissipiert wurde.

#### Quantitative Abschätzung

Die elastische Energie einer Feder beträgt:

$$E_F = 1/2 D \cdot x^2.$$

Dabei ist  $x$  die Längenänderung der Feder und  $D$  die Federkonstante. Schaltet man zwei identische Federn hintereinander, so gilt für die Gesamtänderung der Federenergie

$$E_h = 1/2 (1/2 D) (2x)^2 = D \cdot x^2.$$

Im Falle der Parallelschaltung erhält man:

$$E_p = 1/2 (2 \cdot D) (1/2 x)^2 = 1/4 D \cdot x^2.$$

Beim Strukturwechsel des Systems hintereinandergeschalteter in ein System parallel geschalteter Federn sinkt die elastische Energie auf ein Viertel.

Da sich jedoch die Kugel um die Hälfte der Längenänderung einer Feder,  $1/2 x$ , erhebt, wird wegen  $m \cdot g = D \cdot x$  elastische Energie in Gravitationsenergie:

$$E_G = m \cdot g \cdot x/2 = D \cdot x \cdot x/2 = 1/2 D \cdot x^2$$

umgewandelt. Das ist die Hälfte der ursprünglichen elastischen Energie  $E_h$  des Systems. Mit anderen Worten: Ein Viertel der ursprünglichen elastischen Energie,  $1/4 E_h$ , wird dissipiert.

### 3 Der Faden verhält sich nichtlinear

Entscheidend für diesen Strukturwechsel ist die Nichtlinearität des Systems, die in der Eigenschaft der Fäden begründet ist: Während sich die Federn (bei nicht zu großen Dehnungen) näherungsweise linear verhalten, sind die primitiv, weil vertraut, erscheinenden Fäden extrem nichtlinear. Sie stellen jeder Zustandsänderung, die mit einer Fadenverlängerung verbunden wäre (bis zur Reißgrenze), einen sehr großen Widerstand entgegen, während sie einer Änderung, die auf eine Fadenverkürzung hinausläuft, nichts entgegensetzen haben. Sie wirken demnach wie ein mechanischer Gleichrichter<sup>2</sup>. Das gilt auch für den kurzen Verbindungsfaden, der das System der hintereinander geschalteten Federn fixiert. Sobald man den Verbindungsfaden durchtrennt, wird eine Systemänderung in Richtung auf eine weitere Annäherung ans thermodynamische Gleichgewicht bewirkt, die zu einer Belastung der Fäden führt. Dadurch kommt es zu einer Anhebung des Schwerpunktes des Systems und es entsteht eine neue Struktur. Das System ist nunmehr dem thermodynamischen Gleichgewicht näher als zu Beginn, aber noch weiter davon entfernt, als es ganz ohne Fäden der Fall wäre. Ohne Fäden wäre der »Fall« trivial, weil er ein freier Fall wäre.

### 4 Entropieargumente bei einem mechanischen Problem?

Neben der Darstellung eines überraschenden physikalischen Vorgangs möchten wir mit diesem Beispiel einmal mehr darauf aufmerksam machen, dass gerade bei interessanten mechanischen Vorgängen oft unter der Hand thermodynamische Argumente und Vorstellungen ins Spiel kommen, ohne dass dies bewusst würde. Beispielsweise wird der Energiesatz der Mechanik oft in unmittelbarer Nachbarschaft zu Vorgängen (wie etwa dem Umkippen eines hochkant stehenden Klotzes), diskutiert im festen Glauben, man habe es in beiden Fällen mit rein mechanischen Sachverhalten zu tun. Man sagt dann etwa, der Klotz sei ins stabile Gleichgewicht übergegangen oder man spricht von

<sup>2</sup> Dieser Überlegung nach müsste man mit Zenerdioden und Widerständen ein elektrisches Analogon zustandebringen, wie in [6] beschrieben wurde.

der Minimierung der mechanischen Energie. Es wird nur selten klar, dass das Gleichgewicht, von dem hier die Rede ist, insofern thermodynamisch ist, als es nur durch Dissipation von mechanischer Energie erreicht werden kann. Der Energiesatz der Mechanik gilt in diesem Fall gerade nicht. Der Satz von der Minimierung der mechanischen Energie erweist sich daher als Spezialfall des Satzes von der Maximierung der Entropie, also des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik. Er hat hier nur deshalb eine besonders einfache Form, weil die mit der Dissipation von mechanischer Energie einhergehende Temperaturänderung i. a. vernachlässigt werden kann.

Ebenso wie die Energie ist die Entropie eine Disziplin übergreifende Größe, für die es nicht nur in rein thermodynamischen Kontexten interessante Anwendungen gibt. Im Sinne der Universalität der beiden Hauptsätze und eines tieferen Verständnisses von physikalischen Vorgängen, wie hier am Beispiel der paradoxen Federn illustriert, plädieren wir dafür, die Entropie möglichst frühzeitig, ggf. über das qualitative Konzept der Energieentwertung, einzuführen.

#### Literatur

- [1] BOYSEN et al.: Oberstufe Physik. – Berlin: Cornelsen 1999, 136f.
- [2] D. BRAESS: Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. Unternehmensforschung **12/4** (1968), 257–268.
- [3] CHR. PÖPPE: Paradoxes Verhalten physikalischer und ökonomischer Systeme. – Spektrum der Wissenschaft 1992, Nr. 11, 23–26.
- [4] H. J. SCHLICHTING: Energieentwertung, ein qualitativer Zugang zur Irreversibilität. – Praxis der Naturwissenschaften/Physik **49** (2000) Nr. 2, 2–6.
- [5] H. J. SCHLICHTING: Von der Energieentwertung zur Entropie. – Praxis der Naturwissenschaften/Physik **49** (2000) Nr. 2, 7–11.
- [6] J. E. COHEN – P. HOROWITZ. – In: Nature 352, Nr. 6337, 699–701 (22. August 1991).

*H. JOACHIM SCHLICHTING, Universität Münster, Institut für Didaktik der Physik, Wilhelm-Klemm-Str. 10, 48149 Münster, schlichting@uni-muenster.de, ist Professor für Didaktik der Physik. Die physikalische und fachdidaktische Erschließung von Alltags- und Naturphänomenen zählt zu einem seiner Arbeitsgebiete.* ■